Isomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$

Développement pour les leçons 101 [1], 106 [2], 150 [3], 170 [4], 191 [5], 214 [6], 215 [7].

1 Introduction

L'objectif de ce long développement est de montrer que les groupes $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ sont isomorphes. Pour cela, on fait agir $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur son espace tangent à l'origine et on utilise la structure de sous-variété de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$.

2 Préambule

On va tout d'abord montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ sont des sous-variétés. Pour cela, il faut utiliser les submersions $M \mapsto (M^T M, \det(M))$ à valeur dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ et $M \mapsto \det(M)$.

Il faut aussi déterminer l'espace tangent à l'identité de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ et de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$. Pour le premier, on utilise la submersion et on voit directement que son espace tangent à l'origine est l'ensemble $\mathrm{T}_{\mathrm{I}_2}(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}))$ des matrices M de trace nulle. Dans le second cas, on trouve que $\mathrm{T}_{\mathrm{I}_3}(\mathrm{SO}_3(\mathbb{C}))$ est l'ensemble des matrices antisymétriques. Le premier est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc est de dimension 3, tandis que le second est de dimension $\frac{3(3-1)}{2} = 3$.

3 Démonstration

On fait agir $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur son espace tangent en l'identité par conjugaison. On obtient ainsi un morphisme $\varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{T}_{\mathrm{I}_2}(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})))$ qui à une matrice A associe $\varphi_A : X \mapsto AXA^{-1}$. Cette action est bien définie car $\mathrm{Tr}(AXA^{-1}) = \mathrm{Tr}(X) = 0$. Pour toute matrice A, l'application φ_A est linéaire et bijective. On peut ainsi identifier $\varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$. De plus, on sait que $\det(\varphi_A(X)) = \det(X)$. Comme le déterminant en dimension 2 est une forme quadratique, on a qu'en fait $\varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \subset \mathrm{O}(\det)$. Soit maintenant $X \in \mathrm{T}_{\mathrm{I}_2}(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}))$. On peut alors écrire

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

et alors $\det(X) = -a^2 - \frac{1}{2}(b+c)^2 + \frac{1}{4}(b-c)^2$. Chacun des termes quadratiques sont linéairement indépendants, donc $\det$ est non-dégénérée et de rang maximal, on a donc que $\mathrm{O}(\det)$ s'identifie au groupe $\mathrm{O}_3(\mathbb{C})$. De plus, on sait que φ est continue et que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est connexe (car connexe par arc) et on obtient, comme l'identité est dans $\varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ et que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ est la composante connexe de l'identité, on en déduit la première inclusion, à savoir que $\varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$.
Pour l'inclusion inverse, on doit tout d'abord calculer $d\varphi(I_2)$. Si $H \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est assez petit, on a que

$$\begin{aligned} \varphi(I_2 + H) &= X \mapsto (I_2 + H)^{-1} X (I_2 + H) \\ &= (I_2 - H + H^2 + \dots) X (I_2 + H) \\ &= X + HX - XH + o(H) \end{aligned}$$

Donc la différentielle de φ en l'identité est l'application qui à H associe $X \mapsto HX - XH$. En la restreignant à l'espace tangent de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ en l'identité, on obtient alors un morphisme $d\varphi(I_2) : \mathrm{T}_{\mathrm{I}_2}(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})) \to \mathrm{T}_{\varphi(I_2)}(\mathrm{O}_3(\mathbb{C})) = \mathrm{T}_{I_3}(\mathrm{O}_3(\mathbb{C}))$. Or, les espaces tangents en l'identité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ et de $\mathrm{O}_3(\mathbb{C})$ sont les mêmes, on obtient donc un morphisme $d\varphi(I_2) : \mathrm{T}_{\mathrm{I}_2}(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})) \to \mathrm{T}_{\mathrm{I}_3}(\mathrm{SO}_3(\mathbb{C}))$. On a de plus que ce morphisme est injectif. En effet,

$$\ker(d\varphi(I_2)) = \{H \in \mathrm{T}_{\mathrm{I}_2}(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})) \mid \forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ HX = XH \text{ et } \mathrm{Tr}(H) = 0\} = \{0\}$$

Comme $\dim \mathrm{T}_{\mathrm{I}_2}(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})) = \dim \mathrm{T}_{\mathrm{I}_3}(\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})) = 3$, on a que $d\varphi(I_2)$ est un isomorphisme. Ainsi, par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage $U \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ de l'identité et un voisinage $V \subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ tel que φ soit un difféomorphisme de U dans V. En particulier, $\varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ possède un ouvert et donc comme $\varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ est un groupe topologique, il est ouvert et donc il est aussi fermé. Comme il est non-trivial et que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ est connexe, on obtient que $\varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) = \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$. De plus, le noyau de φ est exactement l'ensemble des homothéties, et donc $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$.

4 Bibliographie

Tout est dans le H2G2 tome 1 page 273. Mais faut s'armer sur les sous-variétés.

1. Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
2. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.
3. Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
4. Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
5. Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.
6. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.
7. Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.